

## Važnost dokaza obrata poučka

Andelko Marić, Sinj



U ovom se članku želi pokazati kako treba biti oprezan pri zaključivanju o istinitosti obrata neke tvrdnje iz (dokazane) istinitosti te tvrdnje. Središnja misao sažeta je u raščlambi (ne)istinitosti jednog zaključka. Sve će to biti pokazano na temelju zajedničkih osobitosti pravokutnoga i jednoga, njemu pridruženoga, nepravokutnog trokuta.

Prije toga, navest ćemo dva jednostavna primjera u kojima ne vrijedi obrat (istinite) tvrdnje.

1) Ako su  $a$  i  $b$  dva realna broja i ako je  $a = b$ , tada je  $a^2 = b^2$ .

Očito je ova tvrdnja istinita. Obrat te tvrdnje glasi:

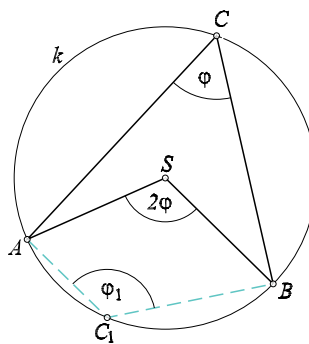
Ako za realne brojeve  $a$  i  $b$  vrijedi  $a^2 = b^2$ , tada je  $a = b$ .

To nije istinito, jer iz  $a^2 = b^2$  slijedi  $|a| = |b|$ , te je  $a = b$  ili  $a = -b$ .

2) U ravnini su zadane točke  $S$ ,  $A$  i  $B$  tako da je  $|SA| = |SB| = r$  i  $\sphericalangle BSA = 2\varphi$ ,  $0 < \varphi < 90^\circ$ .

**Tvrdnja.** Ako je  $C$  točka ravnine takva da je  $\sphericalangle BCA = \varphi$ , tada točka  $C$  pripada kružnici  $k(S, r)$ .

Dokaz te tvrdnje slijedi neposredno iz poučka o obodnom i središnjem kutu (vidi sliku).



**Obrat tvrdnje.** Ako (uz zadane uvjete) točka  $C$  pripada kružnici  $k(S, r)$ , tada je  $\sphericalangle BCA = \varphi$ .

Pokažimo da to nije istinito. Ako je  $C_1$  točka na manjem luku  $\widehat{AB}$  kružnice  $k(S, r)$ , tad je četverokut  $AC_1BC$  tetivan i vrijedi:  $\sphericalangle BC_1A = \varphi_1 = 180^\circ - \varphi$ .

Sada se vratimo najavljenj temi.

Promatrajmo tri tvrdnje koje se odnose na trokut čije su duljine stranica  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , a  $R$  polumjer trokutu opisane kružnice.

$$a^2 + b^2 = c^2 \iff \text{trokut je pravokutan.} \quad (1)$$

$$c = 2R, (c^2 = 4R^2) \iff \text{trokut je pravokutan.} \quad (2)$$

$$a^2 + b^2 = 4R^2 \iff \text{trokut je pravokutan.} \quad (3)$$

Prve dvije tvrdnje su istinite. Postavlja se pitanje istinitosti treće tvrdnje, odnosno ispravnosti zaključka: (1), (2)  $\implies$  (3).

Za pravokutni trokut vrijedi Pitagorin poučak, koji obično pišemo u obliku:  $a^2 + b^2 = c^2$ . Kako se, po Talesovu poučku, središte pravokutnom trokutu opisane kružnice podudara s polovištem hipotenuze, to je  $c = 2R$ . Zato, za pravokutni trokut, vrijedi:

$$a^2 + b^2 = 4R^2. \quad (4)$$

Vrijedi li obrat posljednje tvrdnje? To jest, vrijedi li tvrdnja: *Ako za duljine dviju stranica i za polumjer trokutu opisane kružnice vrijedi (4), tada je trokut pravokutan?*

Navikli smo da za većinu geometrijskih poučaka vrijedi i obrat poučka. Slijedom te navike mogli bismo na postavljeno pitanje odgovoriti: DA! Međutim, odgovor je NE. Pokažimo to na jednom primjeru.

U trokutu je zadano:  $c = 8\sqrt{3}$ ,  $\alpha = 15^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ . Dokažite da, uz uobičajene oznake u trokutu, vrijedi:

$$a^2 + b^2 = 4R^2.$$

*Rješenje.* Iz zadanih kutova je očito da trokut nije pravokutan. Vrijedi

$$2R = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{8\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 16.$$

Kako je

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \end{aligned}$$

to je  $a : c = \sin \alpha : \sin \gamma$ , a odatle  $a = 4\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$ . Isto je tako

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sin [180^\circ - (\alpha + \beta)] = \sin(\alpha + \beta) \\ &= \sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Zato je  $b = 2R \sin \beta = 4(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$ . Dalje je

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= [4\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)]^2 \\ &\quad + [4\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)]^2 \\ &= 32(4 - 2\sqrt{3} + 3 + 2\sqrt{3}) \\ &= 32 \cdot 8 = 16^2, \end{aligned}$$

to jest  $a^2 + b^2 = 4R^2$ .

Vidimo da postoji trokut, koji nije pravokutan, a za koji vrijedi (4). Prema tome, napišemo li "Pitagorin poučak" u obliku (4), tada ne vrijedi obrat poučka.

Promotrimo još jednom trokut iz navedenog primjera. Mjere kutova toga trokuta su  $\alpha = 15^\circ$ ,  $\beta = 105^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ . Uočimo da je  $\beta - \alpha = 90^\circ$ . Podsjetimo se, ako je zbroj mjera dvaju kutova trokuta jednak  $90^\circ$ , trokut je pravokutan. Trokut kojemu je *razlika* mjera dvaju kutova jednaka  $90^\circ$  zove se **pseudopravokutni** trokut. Pokazat ćemo da za pseudopravokutni trokut vrijede neki poučci, potpuno u istom izričaju, kao i za pravokutni trokut. (Naravno, pritom se ne misli na opće poučke koji vrijede za bilo koji trokut.)

Dokažimo da vrijedi (nazovimo ga) **popćeni Pitagorin poučak**:

*Ako za kutove trokuta vrijedi jedna od jednakosti:  $\alpha + \beta = 90^\circ$  ili  $|\alpha - \beta| = 90^\circ$ , tada za duljine nasuprotnih stranica  $a$  i  $b$  te za polumjer trokutu opisane kružnice  $R$  vrijedi  $a^2 + b^2 = 4R^2$ .*

To znači da "Pitagorin poučak" napisan u obliku (4) vrijedi za pravokutni, ali i za pseudopravokutni trokut.

Dokaz tog poučka za pravokutni trokut izvodi se već u osnovnoj školi i ovdje ga neće-

mo navoditi. Spomenimo da je danas poznato nekoliko stotina različitih dokaza Pitagorina poučka. (Zainteresirani čitatelj može o tome više naći u članku Mee Bombardelli: *Kako dokazati Pitagorin teorem na 30 načina?*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike mentore 5, Kraljevica, 1996.)

Dokažimo da ovako iskazan poučak vrijedi i za pseudopravokutni trokut.

Neka za kutove trokuta vrijedi  $\alpha = \beta - 90^\circ$ , odnosno  $\beta = 90^\circ + \alpha$ , tada je

$$\sin \beta = \sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha.$$

Kako je po poučku o sinusima  $a = 2R \sin \alpha$ ,  $b = 2R \sin \beta = 2R \cos \alpha$ , to je

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2R \sin \alpha)^2 + (2R \cos \alpha)^2 \\ &= 4R^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha), \end{aligned}$$

to jest  $a^2 + b^2 = 4R^2$ .

Isto se dokaže i za  $\beta = \alpha - 90^\circ$ .

Sada je logično postaviti ovo pitanje. Vrijedi li obrat poopćenoga Pitagorinog poučka? To jest, vrijedi li tvrdnja: *Ako za dužine stranica  $a$  i  $b$  te za polumjer  $R$  trokutu opisane kružnice vrijedi  $a^2 + b^2 = 4R^2$ , tada je trokut pravokutni ili pseudopravokutni?*

Poučeni dosadašnjim razmatranjima, moramo biti oprezni, jer nigdje nije dokazano da formula (4), osim za pravokutni i pseudopravokutni trokut, ne vrijedi možda i za još neke trokute. Ako za trokut vrijedi jednakost (4), tada vrijedi:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 4R^2 \\ \implies (2R \sin \alpha)^2 + (2R \sin \beta)^2 &= 4R^2 \\ \implies \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta &= 1 \\ \implies \sin^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \beta \\ \implies \sin^2 \alpha &= \cos^2 \beta. \end{aligned}$$

Kako su  $\alpha$  i  $\beta$  kutovi trokuta, to je  $\sin \alpha > 0$ , dok  $\cos \beta$  može biti i pozitivan i negativan, a ne može biti jednak nuli, jer bi tada bilo  $\sin \alpha = 0$ , što je za kut trokuta nemoguće. Zato je  $\sin \alpha = |\cos \beta|$ . Moguća su dva slučaja:

1)  $0 < \beta < 90^\circ$ , tada je  $\cos \beta > 0 \implies |\cos \beta| = \cos \beta$ . Zato je

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \cos \beta = \sin(90^\circ - \beta) \implies \\ \alpha &= \begin{cases} 90^\circ - \beta + k \cdot 360^\circ, & k \in \mathbf{Z} \\ 180^\circ - (90^\circ - \beta) + l \cdot 360^\circ, & l \in \mathbf{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Mora biti (jer su  $\alpha$  i  $\beta$  kutovi trokuta)  $k = 0$ ,  $l = 0$ . Zato može biti  $\alpha + \beta = 90^\circ$ ,  $\alpha - \beta = 90^\circ$ .

2)  $90^\circ < \beta < 180^\circ$ , u ovom slučaju je  $\cos \beta < 0 \implies |\cos \beta| = -\cos \beta \implies \sin \alpha = -\cos \beta = \sin(\beta - 90^\circ)$  odakle je

$$\alpha = \begin{cases} \beta - 90^\circ + k \cdot 360^\circ, \\ 180^\circ - (\beta - 90^\circ) = 270^\circ - \beta. \end{cases}$$

Moguće je samo  $\beta - \alpha = 90^\circ$ .

Zaključujemo, ako za trokut vrijedi relacija (4), tada vrijedi jedna od jednakosti:

$$\alpha + \beta = 90^\circ, \quad |\alpha - \beta| = 90^\circ.$$

To znači, trokut za koji vrijedi (4) je pravokutni ili pseudopravokutni.

Može se pokazati da, osim relacije  $a^2 + b^2 = 4R^2$  koja vrijedi i za pravokutni i za pseudopravokutni trokut, ta dva trokuta imaju još nekih zanimljivih zajedničkih svojstava. O tome više u sljedećem broju.

Rješenja iz prošlog broja:

$$\begin{array}{r} 5. \\ 28 \times 3 = 84 \\ + \quad \times \quad : \\ \hline 5 - 3 = 2 \\ \hline 33 + 9 = 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6. \\ 27 \times 8 = 216 \\ + \quad + \quad : \\ \hline 2 \times 9 = 18 \\ \hline 29 - 17 = 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7. \\ 7 \times 32 = 224 \\ + \quad : \quad - \\ \hline 67 \times 2 = 134 \\ \hline 74 + 16 = 90 \end{array}$$