

NEJEDNAKOSTI (mOh)

Znakovi nejednakosti:

$>$ ("veće") , \geq ("veće ili jednako") , $<$ ("manje") , \leq ("manje ili jednako")

Ako su a i b dva različita realna broja i ako je njihova razlika $a - b$ pozitivna, tada je a veće od b , u oznaci $a > b$, tj. b manje od a , u oznaci $b < a$:

$$a - b > 0 \Rightarrow a > b \Rightarrow b < a.$$

Za dva realna broja a i b postoji samo jedna od relacija:

$$a < b \text{ ili } a = b \text{ ili } a > b.$$

<p>$a > b$ i $b > c \Rightarrow a > c$ (svojstvo tranzitivnosti)</p> <p>$a > b$ i $c > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$</p> <p>$a > b$ i $c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$</p> <p>$a < b$ i $c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$</p> <p>$a < b$ i $c > 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$</p> <p>* $a > b$ i $c < 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$</p> <p>* $a > b$ i $c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$</p> <p>* $a < b$ i $c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$</p> <p>* $a < b$ i $c < 0 \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$</p> <p>* Ako oba dijela nejednakosti pomnožimo ili podijelimo s istim negativnim brojem, dobivamo nejednakost suprotnog smisla.</p> <p>$a > b$ i $c = 0 \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$</p> <p>$a < b$ i $c = 0 \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$</p> <p>** $a > b$ i $c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c > b + c$</p> <p>** $a < b$ i $c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$</p> <p>** Dodavanjem jedne te iste veličine na obje strane nejednakosti njezin smisao se ne mijenja.</p> <p>$a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$</p> <p>$a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$</p> <p>*** $a > b$ i $c > d \Rightarrow a + c > b + d$</p> <p>*** $a_1 > b_1, a_2 > b_2, a_3 > b_3, \dots, a_n > b_n \Rightarrow$ $\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n > b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$</p> <p>*** Nejednakosti istog smisla zbrajamo tako da zbrojimo desne strane i zbrojimo lijeve strane.</p> <p>$a > b$ i $c < d \Rightarrow a - c > b - d$</p>	<p>$a > b > 0$ i $c > d > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot d$</p> <p>$a > b$ i $c > d$ i $a > 0$ i $d > 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot d$</p> <p>$a_1 > b_1 > 0, a_2 > b_2 > 0, \dots, a_n > b_n > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n > b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_n$</p> <p>$a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$</p> <p>$a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a^n} < \frac{1}{b^n}$</p> <p>$a > 0 > b \Rightarrow a^{2 \cdot n + 1} > b^{2 \cdot n + 1}$</p> <p>$a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$</p> <p>$a > b > 0 \Rightarrow a^{\frac{p}{q}} > b^{\frac{p}{q}}$</p> <p>$a > b > 0$ i $x > 0 \Rightarrow a^x > b^x$</p> <p>$a + b \leq a + b$ (nejednakost trokuta)</p> <p>$\left \sum_{k=1}^n a_k \right \leq \sum_{k=1}^n a_k$</p> <p>$a - b \leq a + b$</p> <p>$(a - b)^2 \leq a^2 - b^2$</p> <p>$\sqrt{ a } - \sqrt{ b } \leq \sqrt{ a - b }$</p> <p>$x < a, a > 0 \Rightarrow -a < x < a$</p> <p>$x \leq a, a > 0 \Rightarrow -a \leq x \leq a$</p> <p>$x > a, a > 0 \Rightarrow x < -a$ i $x > a$</p> <p>$x \geq a, a > 0 \Rightarrow x \leq -a$ i $x \geq a$</p> <p>$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a - b \leq a - b \leq a + b$</p>
---	--

Bernoullijeva nejednakost

Za sve realne brojeve $a \geq -1$ i cijele brojeve $n \geq 1$ vrijedi

$$(1+a)^n \geq 1+n \cdot a$$

Znak jednakosti vrijedi kada je $n = 1$ ili $a = 0$.

Binomna nejednakost

$$a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |a \cdot b| \leq \frac{1}{2} \cdot (a^2 + b^2)$$

Cauchy-Schwarzova nejednakost

Za sve realne brojeve a_i, b_i vrijedi

$$\left| a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + \dots + a_n \cdot b_n \right| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_n^2}$$

ili

$$\left(a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + \dots + a_n \cdot b_n \right)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 \right) \cdot \left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_n^2 \right)$$

Nejednakost Čebiševa

Ako su $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ pozitivni realni brojevi, onda vrijedi:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \right) \cdot \left(\frac{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n}{n} \right) \leq \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + \dots + a_n \cdot b_n}{n}$$

za $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$ i $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \dots \leq b_n$

ili $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n$.

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \right) \cdot \left(\frac{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n}{n} \right) \geq \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + \dots + a_n \cdot b_n}{n}$$

za $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n$.