Primjena matematičke indukcije u konstruktivnoj geometriji

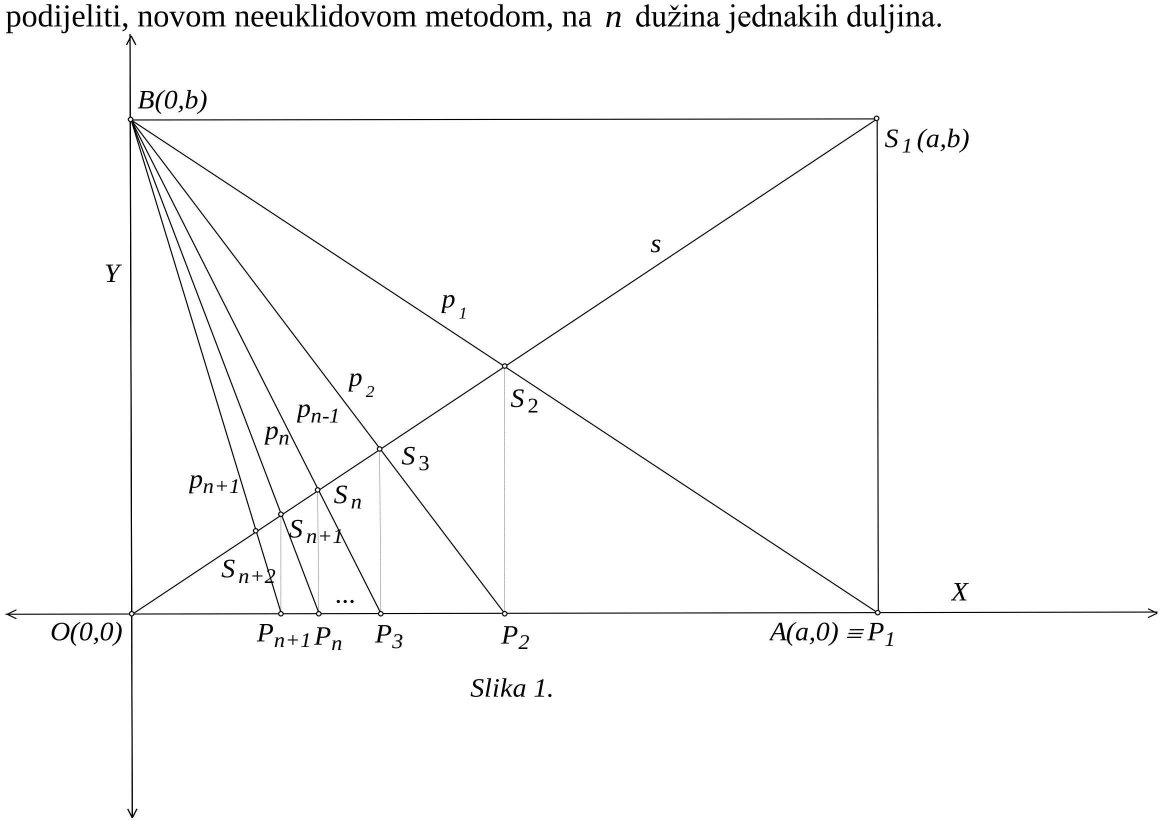
Petar Svirčević, Zagreb

Dobro je poznato, kako se može bilo koja dužina podijeliti, u smislu konstruktivne geometrije, na bilo koji broj jednakih dužina. Naime, tu konstrukciju je iskazao i dokazao Eulkid u *Propoziciji 10.* u *Knjizi 6.,* koja je sastavni dio njegovih *Elemenata.* Ta jedina metoda podjele dužine na jednake dijelove se u matematici, i ne samo u matematici, primijenjivala makar dvadeset tri stoljeća, sve dok nije objavljen članak *Eulkid-Fibonacci-Sketchpad*, čiji su autori Daniel Litchfield i David Goldenheim uz potporu Charles H. Dietricha. Članak je objavljen u časopisu *The Mathematics Teacher* u broju iz prvog mjeseca 1997. U tome članku, taj teorem konstruktivne podjele razdvojen je na dva slučaja; na slučaj neparnoga broja jednakih dijelova i na slučaj parnoga broja jednakih dijelova. Navedene konstrukcije se zovu GLaD-*ove konstrukcije*. Vidimo da je akronim izveden od prvih slova prezimena autora tih konstrukcija. *No, mi ćemo sada dati poopćenje tih konstrukcija, tako da nećemo razlikovati podjelu na parni ili neparni broj jednakih dijelova, i to ćemo dokazati matematičkom indukcijom.*

Konstrukcija 1. Bilo koja dužina $\overline{OA}$ se dijeli na bilo koji broj n, $n \in \{2,3,4,...\}$, jednakih dužina, kako je prikazano na *Slici* 1., gdje je

$$\left|OP_n\right| = \frac{1}{n}\left|OA\right|. \tag{1}$$

Dokaz. Neka je zadana dužina $\overline{OA}$, čija je duljina $\left|OA\right| = a$. Sada ćemo tu dužinu podijeliti, novom neeuklidovom metodom, na n dužina jednakih duljina.



Slika 1.

Konstruirajmo pravokutnik OAS_1B, tako da $|OA| = |BS_1| = a$ i $|OB| = |AS_1| = b$. Povucimo dijagonale $\overline{OS_1}$ i $\overline{AB}$, koje se sjeku u točki S_2, dakle $S_2 = \overline{OS_1} \cap \overline{AB}$. Postavimo taj pravokutnik u koordinatni sustav kao na *Slici 1*. Da ne bi bilo zabune recimo, da $\overline{OS_1}$ predstavlja dijagonalu pravokutnika koja leži na pravcu *s*, a taj pravac crtamo samo na dijelu dijagonale, da nam slika bude preglednija. Analogno ćemo crtati i dijelove pravaca: $p_1, p_2, \ldots p_n, \ldots$ također unutar pravokutnika. Odatle slijedi, da je apscisa od P_2 jednaka $\frac{a}{2}$; odnosno $P_2\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, jer je P_2 ortogonalna projekcija točke S_2 na $\overline{OA}$. Sada kroz točke $P_2\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ i $B(0,b)$ postavimo pravac p_2 čija je jednadžba

$$p_2 \ldots y = -\frac{2b}{a}x + b. \tag{2}$$

Rekli smo, da je *s* pravac kroz točke O i S_1, dakle njegova je jednadžba

$$s \ldots y = \frac{b}{a}x. \tag{3}$$

Pravci s i p_2 se sijeku u točki S_3, dakle $S_3 \equiv s \cap p_2$, pa iz (2) i (3) dobivamo da je $S_3\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}\right)$, a odatle slijedi da je apscisa točke P_3 jednaka $\frac{a}{3}$, dakle $P_3\left(\frac{a}{3}, 0\right)$. Slično bismo dobili da je $P_4\left(\frac{a}{4}, 0\right)$ itd. Pretpostavimo, da smo tako računali sve do $P_n\left(\frac{a}{n}, 0\right)$. Sada primijenimo matematičku indukciju, pa ćemo kroz tu točku $P_n\left(\frac{a}{n}, 0\right)$ i točku $B(0, b)$ postaviti pravac, čija je jednadžba

$$p_n \ldots y = -\frac{nb}{a}x + b. \tag{4}$$

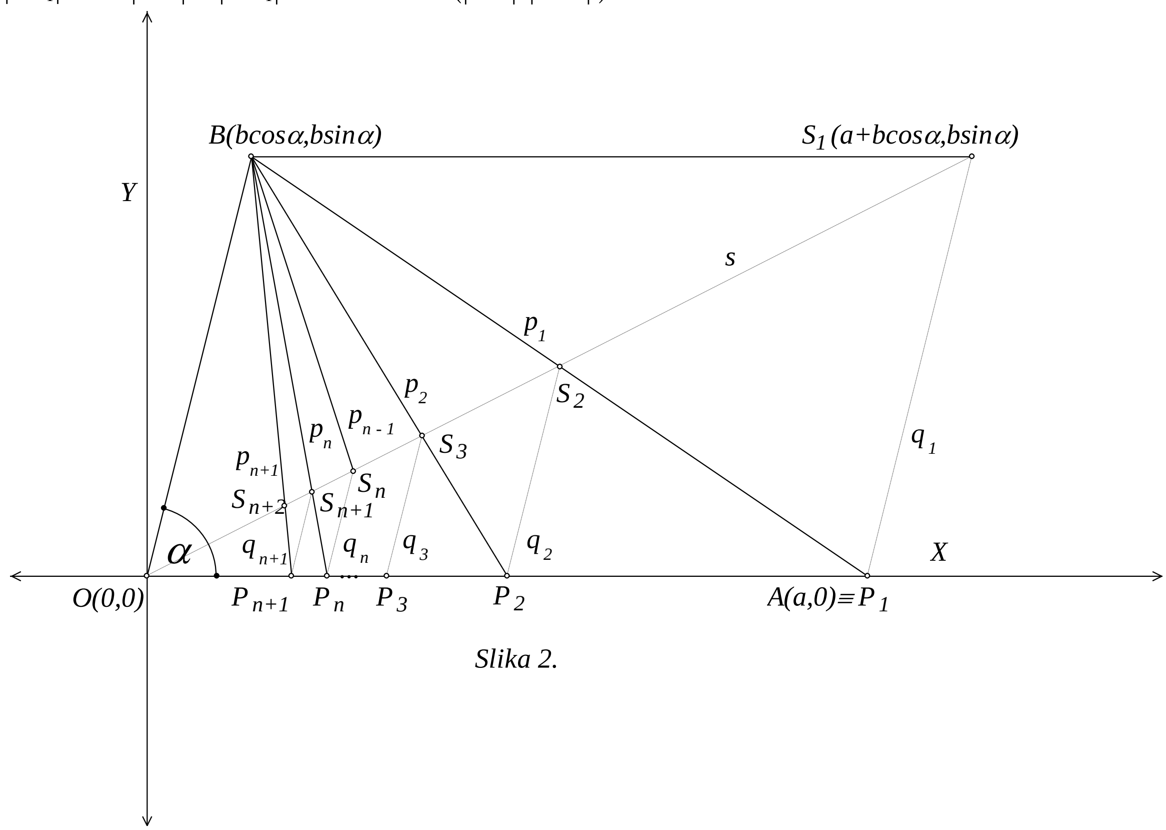
Pravci p_n i s se sijeku u točki $S_n\left(\frac{a}{n+1}, \frac{b}{n+1}\right)$, čije smo koordinate dobili iz (3) i (4), te odatle dobivamo točku $P_{n+1}\left(\frac{a}{n+1}, 0\right)$, a to znači da je $|OP_{n+1}| = \frac{1}{n+1}|OA|$, pa je time K.1., odnosno konstrukcija na *Slici 1.*, u potpunosti dokazana. Napomenimo da korak za P_3 nismo morali ni raditi, već smo mogli odmah primijeniti matematičku indukciju.

Sada ćemo izvršiti poopćenje te konstrukcije, tako da pravokutnik zamijenimo s paralelogramom.

Konstrukcija 2. Bilo koja dužina $\overline{OA}$ dijeli se na bilo koji broj n, $n \in \{2,3,4, \ldots\}$, jednakih dužina konstrukcijom prikazanom na kako je *Slici 2.*, gdje je

$$|OP_n| = \frac{1}{n}|OA|. \tag{5}$$

Dokaz. Neka je zadana dužina $\overline{OA}$ čija je duljina $|OA| = a$. Tu dužinu treba podijeliti na n dužina jednakih duljina. Kostruirajmo paralelogram OAS_1B tako da je $|OA| = |BS_1| = a$, $|OB| = |AS_1| = b$ i $\alpha = \angle(|OA|, |OB|)$, gdje je $0 < \alpha < \pi$.



Slika 2.

Povucimo dijagonale $\overline{OS_1}$ i $\overline{AB}$ koje se sjeku u točki $S_2 \equiv \overline{OS_1} \cap \overline{AB}$. Postavimo taj paralelogram u koordinatni sustav kao na *Slici 2*. Jasno je da je apscisa točke P_2 jednaka $\frac{a}{2}$, odnosno $P_2\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, jer je to sjecište pravca s $\overline{OA}$, koji prolazi s kroz S_2 a paralelan je s $\overline{OB}$. Slično bismo računanjem prema *Slici 2.* dobili da je $P_3\left(\frac{a}{3}, 0\right), \ldots, P_n\left(\frac{a}{n}, 0\right)$. Sada ćemo kroz $P_n\left(\frac{a}{n}, 0\right)$ i $B(b\cos\alpha, b\sin\alpha)$ postaviti pravac

$$p_n \ldots y = \frac{b\sin\alpha}{nb\cos\alpha - a}(nx - a), \tag{6}$$

a kroz $O(0,0)$ i $S_1(a + b\cos\alpha, b\sin\alpha)$ pravac

$$s \ldots y = \frac{b\sin\alpha}{a + b\cos\alpha}x. \tag{7}$$

Ti se pravci sjeku u točki S_{n+1}, a iz (6) i (7) slijedi da je

$$S_{n+1}\left(\frac{a + b\cos\alpha}{n+1}, \frac{b\sin\alpha}{n+1}\right). \tag{16}$$

Postavimo li sada pravac q_{n+1} kroz točku S_{n+1} paralelno s $\overline{OB}$, dobit ćemo da je

$$q_{n+1} \ldots y = xtg\alpha - \frac{atg\alpha}{n+1},$$

a taj pravac siječe os X u točki $P_{n+1}\left(\frac{a}{n+1}, 0\right)$, te je $|OP_{n+1}| = \frac{1}{n+1}|OA|$, čime je K.2., odnosno konstrukcija na *Slici 2.*, u potpunosti dokazana.

Napomena 1. Mogla bi se dati primjedba, da je suvišno što smo iskazali i dokazali K.1. Naima, da smo dokazali samo K.2, tada bi iz nje slijedila K.1. ako bi načinili specijalizaciju $\alpha = 90°$. No, to smo napravili zbog toga tako, da ovo gradio mogu pratiti i oni čitaoci, koji još nisu upoznati s gradivom iz trigonometrije. Drugim riječima, K.1. bi bila specijalizacija od K.2. Konačno, i učenici osnovne škole bi nakon nekoliko konstrukcionih koraka heuristički zaključili da vrijedi K.1., dakle ne moraju znati ni princip matematičke indukcije, pa zato smo i dali jedan „suvišni korak“ u dokazu te konstrukcije. Svakako, bez matematičke indukcije ne radi se o strogom dokazu.

Napomena 2. Euklid (oko 330.-275.p.n.e.) pripada grupi tri najveća matematičara stare ere (Euklid, Arhimed i Apolonije). Bio je sljedbenik Platonove filozofije, pa je vjerojatno obrazovan u Ateni kod Platonovih učenika. Svoju naučnu djelatnost je razvio u aleksandrijskoj matematičkoj školi *Museion*, koju je i utemeljio. Ta ustanova je bila centar nauke toga doba. Euklid je svoje *Elemente* objavio oko 300. p.n.e. Značenje toga djala je u tome, jer je ono koncipirano na aksiomatskoj osnovi, da se kao takvo koristi sve do danas, uz napomenu, da je Hilbert načinio korekciju tog djela početkon dvadesetog stoljeća u djelu *Grundlagen der Geometrie*. Naime, Hilbert je dao strogu aksiomatiku geometrije (aksiomi su potpuni, nadalje, oni su međusobno nezavisni i nekontradiktorni), s tim da neke pojmove nije definirao, već ih je prihvatio ad hoc (npr.: točka, pravac, ravnina, ...). Iz V postulata Euklidovh *Elemenata* je proizašla i neeuklidska geometrija (Geometrija Lobačevskog), koja je bila pretpostavka u izgradnji *Einsteinove specijalne teoreija relativnosti*.

Literatura

[1] D.C. Litchfield; D.A.Goldenheim, Euclid, *Fibonacci, Sketchpad,* The Mathematics Teacher, v90 n1 p8-12 Jan 1997.

[2] Petar Svirčević, *Opća podjela dužine na jednake dijelove*, Poučak br. 10 (15-25), HMD, Zagreb 2002.

[3] (Euklidovi Elementi) http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/ elements/elements.html.

e-mail: petar.svircevic@zg.t-com.hr