Zadaci o simetralama kutova trokuta

Petar Svirčević, Zagreb

Odmah na početku moramo objasniti neke terminološke nedostatke, koji se tiču simetrale kuta trokuta. Naime, (to nam često zbunjuje učenike) znamo da je simetrala kuta polupravac (ako se radi o nutarnjem kutu trokuta), pa je jasno da nema smisla govoriti o duljini simetrale kuta; no naglasimo, da kada kažemo duljina simetrale, tada mislimo na duljinu dužine na simetrali kuta od vrha toga kuta do točke na nasuprotnoj stranici trokuta u kojoj simetrala siječe tu stranicu.

Same formule za duljine simetrala kutova trokuta mogu se izvesti na više načina (čak i bez trigonometrije), pa ćemo ih mi ovdje uzeti bez izvoda i doći do nekoliko zgodnih jedostavnih veza, koje opet mogu biti baza za konstrukciju novih složenijih relacija.

Napomenimo, da ćemo ovdje koristiti naziv *AG nejednakost*, a to znači nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine; tj. $A_n(x_1,...,x_n) \geq G_n(x_1,...,x_n)$, gdje se broj $A_n(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ naziva aritmetička, a broj $G_n(x_1,...,x_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$ geometrijska sredina od nenegativnih realnih brojeva $x_1,\ldots,x_n$. I konačno recimo, da ćemo upotrebljavati uobičajene oznake za veličine kod rješavanja problema u vezi trokuta.

Zadatak 1. Ako su *a,b,c* duljine stranica trokuta, a α, β, γ mjere njegovih kutova, i ako su $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$ duljine simetrala kutova, dokažimo da je

$$\frac{1}{s_\alpha}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{s_\beta}\cos\frac{\beta}{2} + \frac{1}{s_\gamma}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad . \tag{1}$$

Rješenje. Znamo da je

$$s_\alpha = \frac{\sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)}}{b+c} \quad , \tag{2}$$

$$2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2, \tag{3}$$

$$2cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + cos\alpha\, ; \tag{4}$$

pa ako uvažimo te relacije dobivamo $s_\alpha = \frac{\sqrt{bc(b^2 + 2bc + c^2 - a^2)}}{b+c} = \frac{\sqrt{bc(2bc + 2bc\cos\alpha)}}{b+c} =$ $= \frac{bc}{b+c}\sqrt{2(1+\cos\alpha)} = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}$, a odatle je

$$\frac{1}{s_\alpha}cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right). \tag{5}$$

Analogno vrijede i formule (dobivamo ih cikličkim pomakom)

$$\frac{1}{s_\beta}\cos\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right), \tag{6}$$

$$\frac{1}{s_\gamma}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right). \tag{7}$$

Nakon što zbrojimo (5),(6) i (7) dobivamo relaciju (1), što smo i trebali pokazati.

Zadatak 2. Trokut je zadan s elementima $\sqrt{bc}$, β i γ ($\sqrt{bc}\in R^+$, $\beta+\gamma<180^0$) onda i samo onda ako je

$$\sin(\beta+\gamma)<\sin\beta+\sin\gamma. \tag{8}$$

Rješenje. Budući je duljina simetrale

$$s_\alpha=\frac{\sqrt{bc((b+c)^2-a^2)}}{b+c}, \tag{9}$$

a odatle je

$$s_\alpha=\sqrt{bc}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2}. \tag{10}$$

Ako primjenimo poučak o sinusima slijedi

$$\frac{a}{b+c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta+\sin\gamma}. \tag{11}$$

Kako je $\alpha=180^0-(\beta+\gamma)$, dobivamo

$$\sin\alpha=\sin(\beta+\gamma). \tag{12}$$

Supstituiramo li (12) u (11), a to u (10), tada je

$$s_\alpha=\sqrt{bc}\cdot\sqrt{1-\frac{\sin^2(\beta+\gamma)}{(\sin\beta+\sin\gamma)^2}}, \tag{13}$$

i odatle se vidi, da je (8) točno, pa je time dokazana lijeva implikacija. Lako se dokazuje i obrat, a time u potpunosti i zadana ekvivalencija.

Zadatak 3. Ako su *a,b,c* duljine stranica trokuta, i s_α, s_β, s_γ duljine simetrala njegovih kutova, dokažimo nejednakost

$$s_\alpha^2+s_\beta^2+s_\gamma^2<bc+ca+ab. \tag{14}$$

Uputa za rješenje. Rješenje slijedi iz predhodnog zadatka.

Zadatak 4. Dokažimo, da je

$$\frac{1}{s_\alpha}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{s_\beta}\cos\frac{\beta}{2}+\frac{1}{s_\gamma}\cos\frac{\gamma}{2}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}. \tag{15}$$

Rješenje. Ako na brojeve $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}>0$ primjenimo *AG nejednakost* dobivamo $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$, te ako uvažimo to i (1) tada slijedi (15).

Zadatak 5. Dokažimo, da je

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \geq \frac{s_\alpha s_\beta s_\gamma}{abc} \, . \tag{16}$$

Rješenje. Ako na jednakost (5) primjenimo *AG nejednakost* dobijemo da je

$$\frac{1}{s_\alpha}\cos\frac{\alpha}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{bc}} \, . \tag{17}$$

Cikličkim pomakom dolazimo do relacija

$$\frac{1}{s_\beta}\cos\frac{\beta}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{ca}} \, , \tag{18}$$

$$\frac{1}{s_\gamma}\cos\frac{\gamma}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} \, . \tag{19}$$

Ako ove tri nejednakosti međusobno izmnožimo slijedi relacija (16).

Zadatak 6. Dokažimo, da je

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \geq \frac{s_\alpha s_\beta s_\gamma}{4s^2 r} \, , \tag{20}$$

gdje je $2s = a+b+c$, gdje je r duljina polumjera trokutu opisane kružnice.

Uputa za rješenje. U trećem razredu srednje škole smo došli do formule za površinu trokuta

$$P = \frac{abc}{4r} = s^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \, . \tag{21}$$

Iz (21) i (16) se lako dobiva (20).

Napomena. Možemo lako prodiskutirati, da u relacijama (15),(16) i (20) vrijedi jednakost, ako je $a=b=c$ ili $\alpha=\beta=\gamma$ ili $s_\alpha = s_\beta = s_\gamma$ ili ...