Udaljenosti karakterističnih točaka trokuta

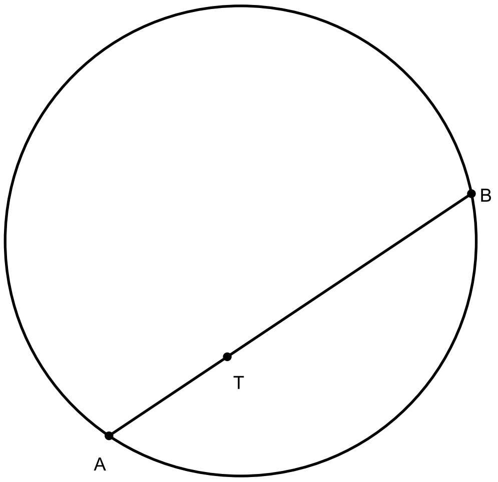
Kristijan Kilassa Kvaternik*

U trokutu postoje četiri karakteristične točke: težište G, ortocentar H, središte upisane kružnice I i središte opisane kružnice O. U ovom ćemo članku odrediti udaljenosti prve tri navedene točke od četvrte, i to koristeći potencije tih točaka u odnosu na opisanu kružnicu trokuta. Pritom ćemo kao posljedicu dobiti neke poznate nejednakosti među veličinama u trokutu.
Za početak ćemo definirati pojam koji će nam biti ključan u računu - potenciju točke u odnosu na kružnicu.

Definicija 1. Neka je dana kružnica $k(S, r)$ i točka T unutar nje. Povucimo točkom T tetivu $\overline{AB}$ kružnice k. *Potencija točke T u odnosu na kružnicu k* jest umnožak

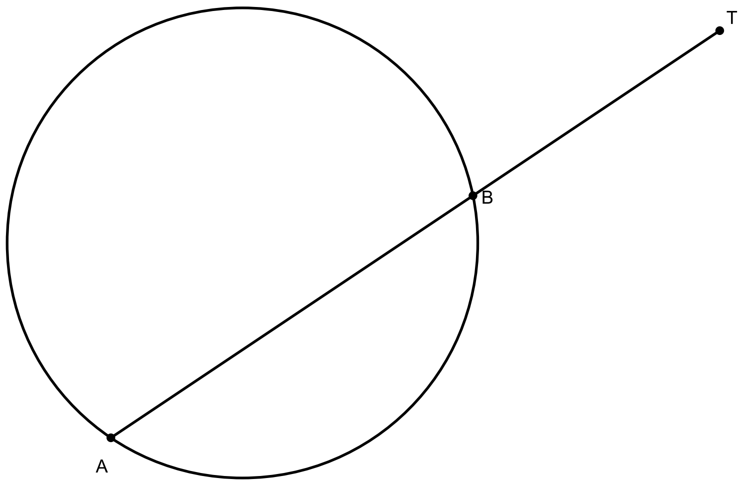
$$|AT| \cdot |TB|.$$

*Autor je student 3. godine studija matematike na Matematičkom odsjeku PMF-a Sveučilišta u Zagrebu; e - mail: kkkvate@student.math.hr



Analogno definiramo potenciju točke u slučaju kada je T izvan kružnice k: točkom T povučemo pravac koji siječe k u točkama A i B. Potencija od T u odnosu na k jest umnožak

$$|AT| \cdot |TB|.$$



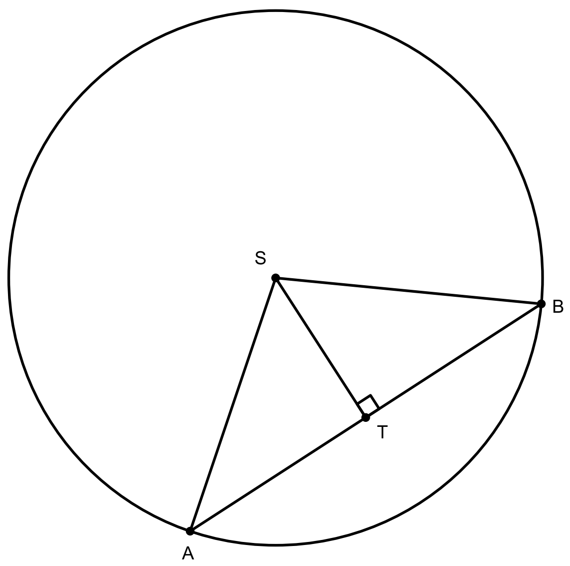
Ako se T nalazi na k, onda kažemo da je njena potencija u odnosu na k nula. Potenciju točke T u odnosu na kružnicu k označavat ćemo sa $p(T,k)$.

Napomena 1. Lako se pokaže da je gornja definicija dobra, tj. da potencija točke T u odnosu na kružnicu k ne ovisi o izboru tetive, odnosno pravca kroz T (ta činjenica slijedi iz sličnosti trokuta).

Iz napomene 1 slijedi

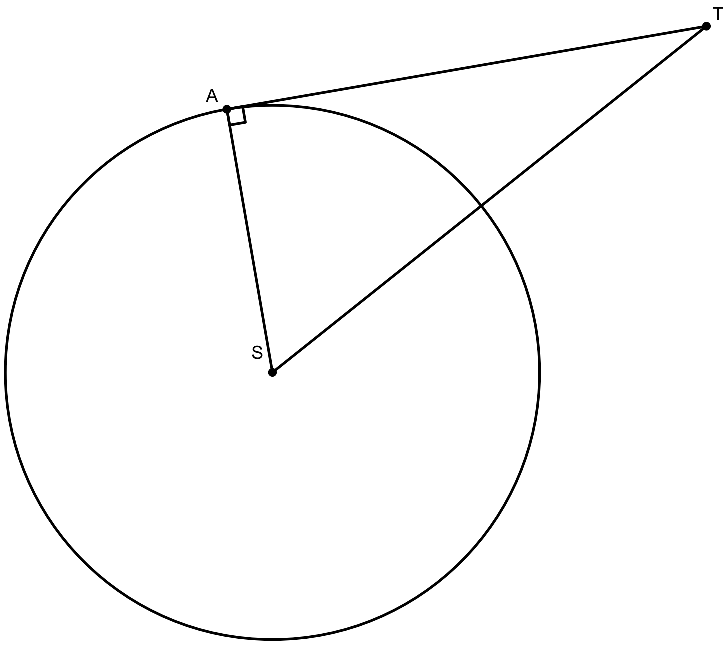
Propozicija 1. *Za potenciju točke T u odnosu na kružnicu $k(S,r)$ vrijedi*

$$p(T,k) = \left| |ST|^2 - r^2 \right| .$$



Dokaz.
Ako se T nalazi na k, tvrdnja očito vrijedi. Ukoliko je T unutar k, povucimo tetivu $\overline{AB}$ kojoj je T polovište (to je tetiva okomita na pravac ST). Sada je prema napomeni 1

$$p(T,k) = |AT| \cdot |TB| = |AT|^2 = |SA|^2 - |ST|^2 = r^2 - |ST|^2.$$



Ako se T nalazi izvan k, onda povučemo tangentu iz T na k. Ako je A diralište te tangente, prema napomeni 1 opet dobivamo

$$p(T,k) = |AT|^2 = |ST|^2 - |SA|^2 = |ST|^2 - r^2.$$

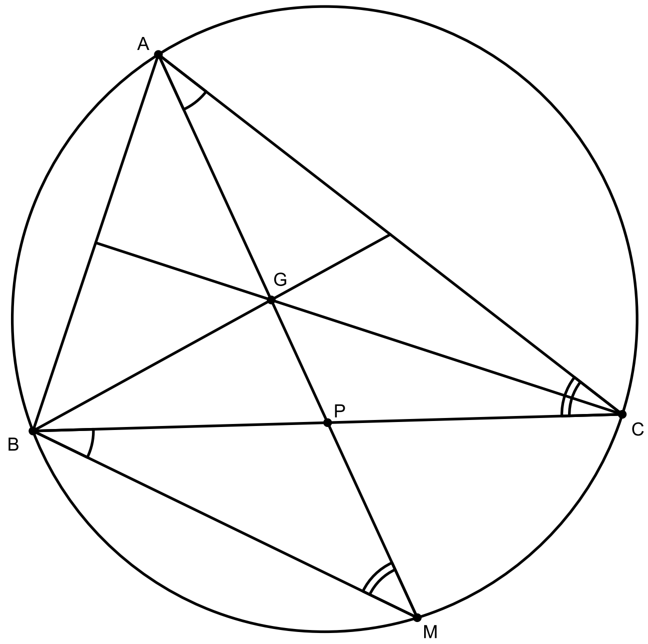
$\triangle$

Propozicija 1 nam daje efikasan način računanja udaljenosti točke od središta opisane kružnice trokuta: naime, dovoljno je odrediti potenciju točke s obzirom na opisanu kružnicu.
Sada možemo i odrediti udaljenosti središta opisane kružnice od preostalih karakterističnih točaka trokuta. Pritom ćemo duljine stranica trokuta označavati sa a, b, c, mjere untarnjih kuteva sa α, β, γ, polumjere opisane, odnosno upisane kružnice sa R i r redom, a opisanu kružnicu trokuta ABC sa (ABC).

Teorem 1. *Udaljenost težišta G od središta O opisane kružnice trokuta ABC*

dana je sa

$$|GO| = \sqrt{R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}}.$$



Dokaz.
Neka je $\overline{AP}$ težišnica u trokutu ABC i neka pravac AP siječe opisanu kružnicu (ABC) u točki M. Zbog jednakosti obodnih kuteva nad istom tetivom u kružnici vrijedi $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MAC$ i $\sphericalangle BMA = \sphericalangle BCA$ pa slijedi da su trokuti BPM i APC slični. Zato imamo

$$\frac{|BP|}{|PM|} = \frac{|AP|}{|PC|}.$$

Budući da je $\overline{AP}$ težišnica, vrijedi $|BP| = |PC| = \frac{1}{2}a$. Također vrijedi $|AP| = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$ (jednakost slijedi prema Eulerovoj relaciji paralelograma) pa uvrštavanjem dobivamo

$$\frac{\frac{1}{2}a}{|PM|} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{\frac{1}{2}a},$$

$$|PM| = \frac{a^2}{2\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}.$$

Budući da težište dijeli težišnicu u omjeru 2 : 1 (računajući od vrha), vrijedi

$$|AG| = \frac{2}{3}|AP| = \frac{1}{3}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

$$|GP| = \frac{1}{3}|AP| = \frac{1}{6}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}.$$

Zato za potenciju težišta vrijedi

$$\begin{aligned} p(G,(ABC)) &= |AG| \cdot |GM| \\ &= \tfrac{1}{3}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \cdot \left(\tfrac{1}{6}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} + \tfrac{a^2}{2\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}\right) \\ &= \tfrac{2b^2+2c^2-a^2}{18} + \tfrac{a^2}{6} \\ &= \tfrac{a^2+b^2+c^2}{9} \end{aligned}$$

Budući da se težište trokuta nalazi unutar trokuta, prema propoziciji 1 slijedi

$$R^2 - |GO|^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$$

$$\Rightarrow |GO| = \sqrt{R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}}.$$

$\triangle$

Korolar 1. *U trokutu s duljinama stranica a, b, c i polumjerom opisane kružnice R vrijedi nejednakost*

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 9R^2.$$

Korolar 2. *Ako su α, β, γ kutevi trokuta, onda vrijede nejednakosti*

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}, \ \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Dokaz. Prema korolaru 1 i teoremu o sinusima slijedi nejednakost

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \leqslant \frac{9}{4}.$$

Budući da su sinusi kuteva u trokutu nenegativni realni brojevi, primjenom nejednakosti između kvadratne i aritmetičke sredine dobivamo

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leqslant 3 \cdot \sqrt{\frac{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma}{3}} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

a primjenom nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leqslant \left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)^3 \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

$\triangle$

Propozicija 2. *Za trokut površine P i radijusa opisane kružnice R vrijedi*

$$P \leqslant \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}.$$

Drugim riječima, površina trokuta nije veća od površine jednakostraničnog trokuta stranice $\sqrt{3}$ puta dulje od njegovog radijusa opisane kružnice.

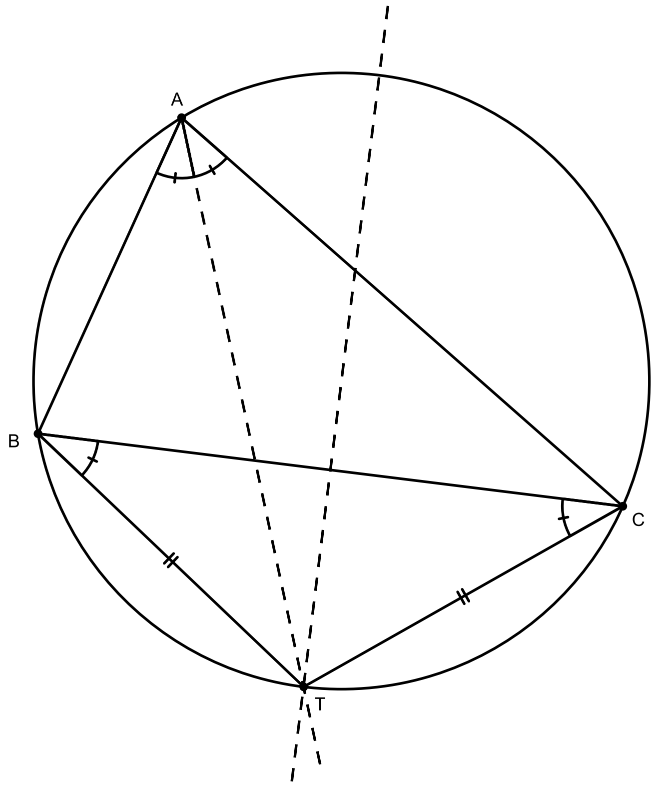
Dokaz. Površina trokuta jest jednaka polovini umnoška duljine dviju njegovih stranica i sinusa kuta među njima. Primjenom teorema o sinusima dobijemo

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Sada primjenom druge nejednakosti korolara 2 direktno slijedi zadana nejednakost. $\triangle$

Za računanje udaljenosti središta upisane od središta opisane kružnice trokuta koristit ćemo neke pomoćne tvrdnje.

Lema 1. *Simetrala stranice trokuta i simetrala toj stranici nasuprotnog kuta sijeku se na opisanoj kružnici trokuta.*



Dokaz.
Neka simetrala stranice $\overline{BC}$ siječe opisanu kružnicu (ABC) u točki T. Zbog svojstva simetrale dužine vrijedi

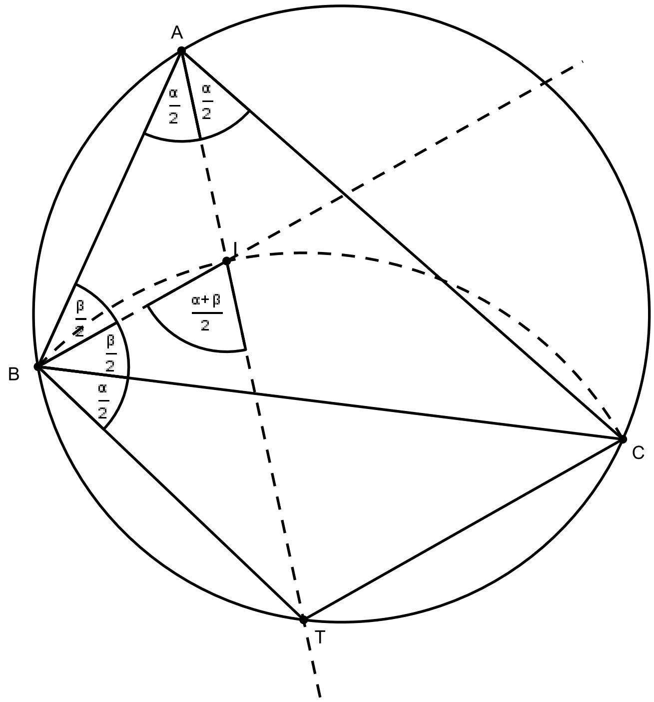
$$|BT| = |TC| \Rightarrow \sphericalangle TCB = \sphericalangle TBC.$$

Sada zbog jednakosti obodnih kuteva nad istom tetivom imamo

$$\sphericalangle BAT = \sphericalangle BCT = \sphericalangle CBT = \sphericalangle CAT,$$

pa slijedi da je AT simetrala kuta $\sphericalangle BAC$. $\triangle$

Lema 2. *Zadan je trokut ABC sa središtem upisane kružnice I. Središte kružnice (IBC) jest polovište T onog luka $\widehat{BC}$ kružnice (ABC) koji ne sadrži točku A.*



Dokaz.
Uočimo da je točka T, prema lemi 1, sjecište simetrale dužine $\overline{BC}$ i kuta $\sphericalangle BAC$. Zato je dovoljno dokazati $|TI| = |TB|$.
Označimo unutarnje kuteve trokuta ABC sa α, β, γ. Vrijedi

$$\sphericalangle TBI = \sphericalangle CBI + \sphericalangle TBC = \sphericalangle CBI + \sphericalangle TAC = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\sphericalangle TIB = \sphericalangle IBA + \sphericalangle IAB = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

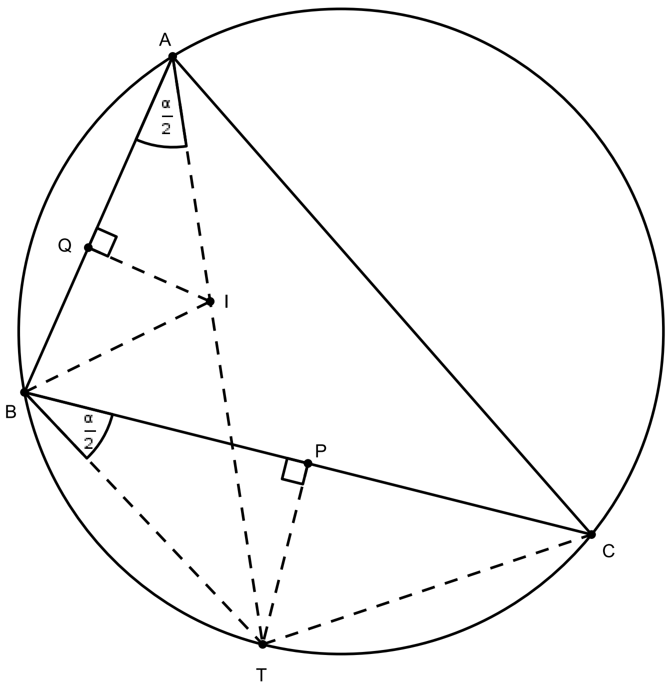
pa imamo

$$\sphericalangle TBI = \sphericalangle TIB \Rightarrow |TI| = |TB|.$$

$\triangle$

Teorem 2. *Udaljenost središta I upisane kružnice od središta O opisane kružnice trokuta ABC dana je sa*

$$|IO| = \sqrt{R^2 - 2Rr}.$$



Dokaz.
Neka pravac AI siječe kružnicu (ABC) u točki T. Prema lemi 2 je T središte kružnice (IBC) i vrijedi $|TB| = |TI| = |TC|$. Neka je P nožište okomice iz T na $\overline{BC}$ i Q nožište okomice iz I na $\overline{AB}$. Uočimo da je P polovište dužine $\overline{BC}$ i da je $|IQ| = r$. Sada iz pravokutnih trokuta AQI i BPT slijedi

$$|IQ| \sin \frac{\alpha}{2} = |AI| \Rightarrow |AI| = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

$$|BP| = |TB| \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow |TI| = |TB| = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{R \sin \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} = 2R \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Za potenciju točke I imamo

$$p(I, (ABC)) = |AI| \cdot |IT| = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot 2R \sin \frac{\alpha}{2} = 2Rr,$$

a kako se točka I uvijek nalazi unutar trokuta ABC,

$$R^2 - |IO|^2 = 2Rr$$

$$\Rightarrow |IO| = \sqrt{R^2 - 2Rr}.$$

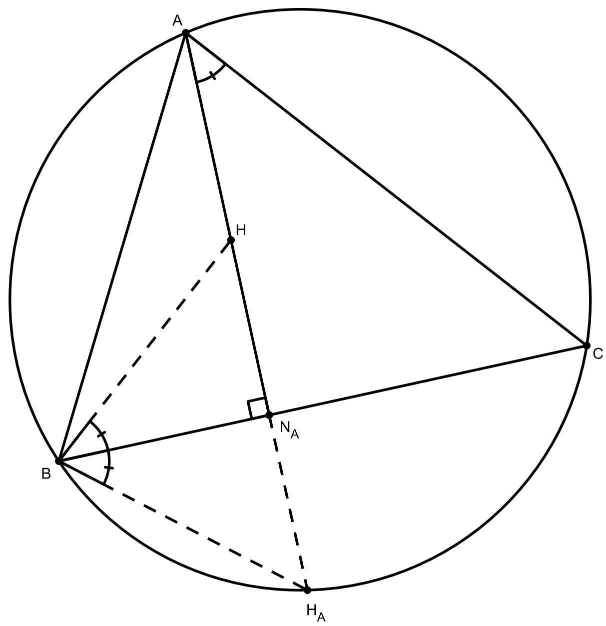
$\triangle$

Korolar 3. *U trokutu s polumjerima R i r opisane, odnosno upisane kružnice vrijedi nejednakost*

$$R \geqslant 2r.$$

Udaljenost ortocentra od središta opisane kružnice odredit ćemo u slučaju šiljastokutnog trokuta (u tom se slučaju ortocentar nalazi unutar trokuta, odn. opisane kružnice). Najprije ćemo dokazati jedno svojstvo ortocentra u trokutu.

Lema 3. *Osnosimetrične slike ortocentra s obzirom na stranice šiljastokutnog trokuta leže na opisanoj kružnici tog trokuta.*



Dokaz.
Neka je N_A nožište okomice iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$ i neka produžetak visine AN_A siječe kružnicu (ABC) u točki H_A. Imamo

$$\sphericalangle H_ABN_A = \sphericalangle N_AAC = 90^\circ - \gamma$$

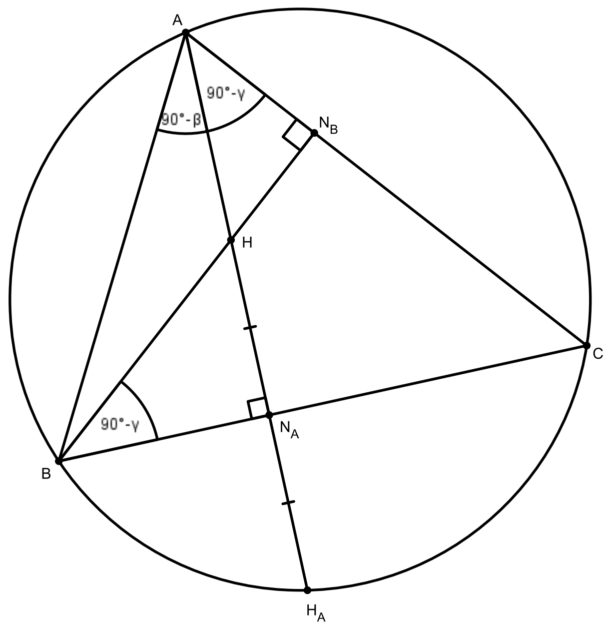
jer su to obodni kutevi nad tetivom $\overline{H_AC}$. Nadalje,

$$BH \perp AC \Rightarrow \sphericalangle N_ABH = 90^\circ - \sphericalangle BCA = 90^\circ - \gamma$$

Slijedi $\sphericalangle H_A B N_A = \sphericalangle N_A B H$ pa su trokuti BN_AH_A i BN_AH sukladni (KSK teorem), odakle slijedi $|HN_A| = |N_AH_A|$. $\triangle$

Teorem 3. *Udaljenost ortocentra H od središta opisane kružnice O šiljastokutnog trokuta ABC dana je sa*

$$|HO| = R\sqrt{1 - 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$



Dokaz.
Neka su N_A, N_B nožišta okomica iz vrhova A, B na stranice $\overline{BC}, \overline{CA}$ respektivno i neka visina AN_A siječe kružnicu po drugi put u točki H_A. Iz pravokutnih trokuta BN_AH, AN_BH, AN_AB dobivamo

$$|HN_A| = |BN_A|\operatorname{ctg}\gamma = |AB|\cos\beta\operatorname{ctg}\gamma,$$

$$|AH| = \frac{|AN_B|}{\sin\gamma} = \frac{|AB|\cos\alpha}{\sin\gamma}.$$

Sada koristeći lemu 3 i teorem o sinusima računamo potenciju točke H

$$\begin{aligned}
p(H,(ABC)) &= |AH|\cdot|HH_A| \\
&= |AH|\cdot 2|HN_A| \\
&= 2|AB|^2\tfrac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\gamma} \\
&= 2\left(\tfrac{|AB|}{\sin\gamma}\right)^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \\
&= 8R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma
\end{aligned}$$

Budući da je trokut šiljastokutan, ortocentar se nalazi unutar trokuta pa imamo

$$R^2-|HO|^2=8R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

$$\Rightarrow |HO|=R\sqrt{1-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

$\triangle$

Napomena 2. Iako smo lemu 3 i teorem 3 dokazali za slučaj šiljastokutnog trokuta, analogni se dokazi provode i u slučaju tupokutnog trokuta (s time da u dokazu teorema 3 koristimo formulu redukcije za kosinus $\cos(180^\circ-\varphi)=-\cos\varphi$). Zato jednakost dana u teoremu 3 vrijedi i za tupokutan trokut. Uočimo također kako je ta jednakost trivijalno ispunjena za pravokutan trokut. Zato ćemo sljedeći korolar iskazati za bilo koji trokut.

Korolar 4. *Ako su α,β,γ kutevi trokuta, onda vrijedi nejednakost*

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leqslant\frac{1}{8}.$$

Literatura

[1] Bombardelli, M., Ilišević, D.: *Elementarna geometrija*, skripta, verzija 1.0, PMF - Matematički odsjek, Zagreb, 2007.

[2] Pavković, B., Veljan, D.: *Matematika 1*, zbirka zadataka, Školska knjiga, Zagreb, 2001.